Ad-Soyad: = CEVAP ANAHTARI = **26.11.2018**

Numara:

İmza:

KODLAMA TEORİSİ I ARA SINAV SORULARI

1) a) Aşağıda parametreleri verilen $\mathbb{F}_2$ üzerinde tanımlı (n, M, d)-kodlarını (varsa) oluşturun. Eğer yoksa kodların olmadığını gösteriniz.

$$(6,2,6), \qquad (3,8,1), \qquad (4,8,2), \qquad (8,30,3)$$

b) $C, \mathbb{F}_2$ üzerinde tanımlı lineer, mükemmel bir $[7,4,d]$-kod ise $d=$? (15p)

2) $\mathbb{F}_3$ üzerinde tanımlı

$$C = \{(\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{0}),(\bar{1},\bar{2},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{0})\}$$

kodu verilsin. C koduna denk içinde $(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$ elemanının bulunduğu kodu elde ediniz. (10p)

3) $\mathbb{F}_5$ üzerinde tanımlı bir kodun üreteç matrisi

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak verilsin. Bu üreteç matrisini standart form haline getiriniz. (15p)

4) $C, \mathbb{F}_3$ üzerinde tanımlı bir $[3,2]$-lineer kod ve üreteç matrisi

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. C koduna göre standart sırayı oluşturarak $(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$ vektörünü dekodlayınız.(15p)

5) $\mathbb{F}_2$ üzerinde tanımlı bir lineer C kodunun kontrol matrisi

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

a) $C=$?

b) Sendrom arama tablosunu oluşturunuz.

c) $(\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{1})$ ve $(\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1})$ vektörlerini dekodlayınız. (20p)

6) $$C_0^4 = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) \in \mathbb{F}_3^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 0 (mod 3)\}$$

$$C_1^4 = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) \in \mathbb{F}_3^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 1 (mod 3)\}$$

$\mathbb{F}_3$ üzerinde tanımlı iki kod olsun.

a) $|C_0^4| = ?$

b) $d(C_0^4) = ?$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$f : C_0^4 \to C_1^4$$
$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) \mapsto (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \sigma(\bar{x}_4))$$

dönüşümü 1-1 ve örten midir? Gösteriniz.

d) C_1^4 kodu için (n, M, d) parametrelerini belirleyiniz.

e) C_0^4 ve C_1^4 kodlarının lineer olup olmadıklarını inceleyiniz. (25p)

NOT: Sınav süresi 90 dakikadır. **BAŞARILAR**

1) a) $(6,2,6) \longrightarrow C_1 = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$

$(3,8,1) \longrightarrow C_2 = \mathbb{F}_2^3 \;,\; |\mathbb{F}_2^3| = 2^3 = 8$

$= \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{0},\bar{1}), \ldots, (\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$

$(4,8,2) \longrightarrow \underset{\text{var}}{(n,M,d)\text{-kod}} \Rightarrow \underset{\text{var}}{(n+1,M,d+1)\text{-kodu}}$

Bu durumda $(3,8,1)$ kodu varsa $(4,8,2)$ kodu vardır.

$C_3 = \{(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), \ldots, (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$

$(8,30,3) \longrightarrow \mathbb{F}_2$ üzerinde tanımlı $(8,30,3)$ kodu var

olsun. $n=8$, $M=30$ $\quad 2t+1=3 \Rightarrow t=1$

Hamming sınırı $\quad 30\left\{\binom{8}{0}+\binom{8}{1}\right\} \leq 2^8$

$270 \leq 256$ (çelişki)

$\therefore$ $\mathbb{F}_2$ üzerinde $(8,30,3)$-kodu yoktur.

b) $n=7$, $M=2^4=16$, $d=2t+1$ olmak üzere C mükemmel olduğundan

$$M\cdot\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{t}\right\}=2^n$$

eşitliği sağlanır. n ve M değerleri yerine yazılırsa

$$16\left\{\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\cdots+\binom{7}{t}\right\}=2^7$$

$\Rightarrow 1+7+\cdots+\binom{7}{t}=8$

$\Rightarrow t=1$

$\Rightarrow d=2t+1=3$ olur

2) $C=\{(\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{0}),\ (\bar{1},\bar{2},\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{0})\}$ olmak

üzere C nin 2. konumdaki sembollerine

$$\tau_1=\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0}\end{pmatrix}$$

permütasyonu uygulanırsa

$$C_1=\{(\bar{0},\bar{2},\bar{2},\bar{0}),\ (\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0})\}$$

kodu elde edilir. C_1 kodunun 4. konumdaki sembollerine

$$\tau_2=\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$$

permütasyonu uygulanırsa

$$C_2=\{(\bar{0},\bar{2},\bar{2},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{0}),\ (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})\}$$

kodu elde edilir. Bu kod C koduna denk ve $(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})$ elemanını bulundurur.

3)

$$G=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&2&3&4&0&0\\1&4&4&1&0&1\end{bmatrix}_{3\times 6}$$

ε_1: 4. sat2 + sat3 $\qquad$ ε_4: 3 sat3 + sat2

ε_2: 4sat1 + sat2 $\qquad$ ε_5: 4 sat2 + sat1

ε_3: 3sat3 $\qquad$ ε_6: 4sat3 + sat1

$$G\underset{\varepsilon_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&2&3&4&0&0\\0&2&1&2&0&1\end{bmatrix}\underset{\varepsilon_2}{\sim}\cdots\cdots\underset{\varepsilon_6}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&1&3&3\\0&1&0&2&4&4\\0&0&1&3&1&3\end{bmatrix}$$

4) $G=\begin{bmatrix}0&1&2\\2&1&0\end{bmatrix}$ üreteç matrisini standart form

haline getirelim.

$\mathcal{E}_1$: 2 sat2 + sat1

$\mathcal{E}_2$: sat1 + sat2

$$G \underset{\mathcal{E}_1}{\sim} \cdots \underset{\mathcal{E}_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = G'$$

Bu durumda C kodu

$$C = \{ (\bar{0},\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{1},\bar{2}), (\bar{0},\bar{2},\bar{1}), (\bar{1},\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2},\bar{0}),$$
$$(\bar{2},\bar{0},\bar{1}), (\bar{2},\bar{1},\bar{0}), (\bar{2},\bar{2},\bar{2}) \}$$

$$q^{n-k} = 3^{3-2} = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} C + (\bar{0},\bar{0},\bar{0}) \\ C + (\bar{1},\bar{0},\bar{0}) \\ C + (\bar{2},\bar{0},\bar{0}) \end{array} \right\} \text{standart sıra}$$

$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$ vektörü 3. sıradadır. Bu durumda

$$\begin{aligned} x &= y - e \\ &= (\bar{1},\bar{0},\bar{1}) - (\bar{2},\bar{0},\bar{0}) \\ &= (\bar{2},\bar{0},\bar{1}) \end{aligned}$$

olarak dekodlanır.

5) a) $H = [B : I_{n-k}]$ ise kodun üreteç matrisi $G = [I_k : -B^T]$ şeklindedir. Bu durumda

$$G = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

olarak bulunur. Buradan C kodu

$\forall x \in C$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_2$ için

$$x = \alpha(100101) + \beta(010110) + \gamma(001011)$$

olmak üzere

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} (\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}), & (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0}), \\ (\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{1}), & (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{1}), \\ (\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0}), & (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) \\ (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), & \\ (\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1}), & \end{array} \right\}$$

şeklindedir.

b)

$q^{n-k} = 2^{6-3} = 8$

Denklik Sınıf lideri	Sendromlar
$(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0},\bar{0})$
$(\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1},\bar{1})$
$\vdots$	$\vdots$

c)

$y_1 = (\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{0})$ $\quad$ $y_2 = (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{1})$ $\quad$ $y_3 = (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1})$

$S(y_1) = (\bar{0},\bar{1},\bar{1})$ $\quad$ $S(y_2) = (\bar{0},\bar{0},\bar{0})$ $\quad$ $S(y_3) = (\bar{1},\bar{1},\bar{0})$

Bu durumda

$$x_1 = y_1 - (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) = (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0})$$

$$x_2 = y_2 - (\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) = y_2$$

$$x_3 = y_3 - (\bar{0},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) = (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{0},\bar{0},\bar{1})$$

olarak dekodlanır.

6) a)

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\to$ 1 tane
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\to$ 4 tane
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\to$ 4 tane
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	$\to$ 6 tane
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	$\to$ 12 tane
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	
				27 tane

O halde $|C_0^4| = 27$

b) $x = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) \in C_0^4$ için $d(x,y) = 2$ olduğundan
$y = (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}) \in C_0^4$

$d(C_0^4) \leq 2$ dir. Buradan $d(C_0^4) = 1$ ya da $d(C_0^4) = 2$ olurdu.
olur. $d(C_0^4) = 1$ olsaydı $\exists\, u, v \in C_0^4 \ni d(u,v) = 1$

$u = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4) \in C_0^4 \Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \pmod 3$

$v = (\bar{\alpha}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4) \in C_0^4 \Rightarrow \alpha_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow u_1 \equiv \alpha_1 \pmod 3$

$\Rightarrow \bar{u}_1 = \bar{\alpha}_1$ (çelişki) $d(u,v) = 1$ idi

$\therefore \ d(C_0^4) = 2$

c) • f 1-1 mi?

$\forall \ x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4), \ y = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4) \in C_0^4$ için

$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ mi?

$f(x) = f(y) \Longrightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \sigma(\bar{x}_4)) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \sigma(\bar{y}_4))$

$\Longrightarrow \bar{x}_1 = \bar{y}_1, \ \bar{x}_2 = \bar{y}_2 \ \bar{x}_3 = \bar{y}_3, \ \sigma(\bar{x}_4) = \sigma(\bar{y}_4)$

$\underset{\sigma, 1\text{-}1}{\Longrightarrow} \bar{x}_1 = \bar{y}_1, \ \bar{x}_2 = \bar{y}_2, \ \bar{x}_3 = \bar{y}_3, \ \bar{x}_4 = \bar{y}_4$

$\Longrightarrow x = y$

$\therefore$ f 1-1 dir.

• f örten mi?

$\forall \ y = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4) \in C_1^4$ için $\exists \ x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) \in C_0^4 \ni f(x) = y$?

$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4) \Longrightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \sigma(\bar{x}_4)) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_4)$

$\Longrightarrow \bar{x}_1 = \bar{y}_1, \ \bar{x}_2 = \bar{y}_2, \ \bar{x}_3 = \bar{y}_3, \ \sigma(\bar{x}_4) = \bar{y}_4$

$\Longrightarrow \bar{x}_1 = \bar{y}_1, \ \bar{x}_2 = \bar{y}_2, \ \bar{x}_3 = \bar{y}_3, \ \bar{x}_4 = \sigma^{-1}(\bar{y}_4)$

$\therefore$ f örten

d) $n = 4, \ |C_0^4| = |C_1^4| = 27, \ d = 2$

$\therefore C_1^4, \ (4, 27, 2)$-koddur.

e) • $(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) \notin C_1^4$ olduğundan C_1^4 lineer değildir.

• $(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0}) \in C_0^4$ olup $C_0^4 \neq \emptyset$ dır.

• $\forall\ x,y \in C_0^4$ için $x+y \in C_0^4$ mı ?

$x \in C_0^4 \Longrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4 \equiv 0 \pmod 3$

$y \in C_0^4 \Longrightarrow y_1+y_2+y_3+y_4 \equiv 0 \pmod 3$

$x+y = (\overline{x_1+y_1}, \overline{x_2+y_2}, \overline{x_3+y_3}, \overline{x_4+y_4})$

$x+y \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow x+y \in C_0^4$

• $\forall x \in C_0^4,\ \forall \alpha \in \mathbb{F}_3$ için $\alpha x \in C_0^4$ mı ?

$x \in C_0^4 \Longrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4 \equiv 0 \pmod 3$

$\alpha x \equiv 0 \pmod 3$

$\therefore\ \alpha x \in C_0^4$

$\therefore\ C_0^4$ lineerdir.